

Ryzyko na rynkach finansowych

dr Tomasz Chmielewski

Szkoła Główna Handlowa
Katedra Polityki Pieniężnej

Semestr letni 2011/2012

Plan wykładu

- Wprowadzenie do pomiaru ryzyka rynkowego
 - Rozkłady stóp zwrotu z różnych aktywów
 - Realizm normalności
 - Grube ogony
 - Wybrane aspekty modelowania rozkładów
 - Przegląd wybranych rozkładów
 - Modele GARCH/MGARCH
- Miary ryzyka
 - Pożądane cechy miar ryzyka
 - VaR jako (nieidealna) miara ryzyka rynkowego
 - Inne miary ryzyka
- Rozszerzenia

(Wybrana) literatura do drugiej części zajęć (1)

- T.G. Andersen, T. Bollerslev, F.X. Diebold, „Parametric and Nonparametric Volatility Measurement”, w: L.P. Hansen, Y. Ait-Sahalia (red.) Handbook of Financial Econometrics, North-Holland, Amsterdam 2005.
- T.G. Andersen, T. Bollerslev, P.F. Christoffersen, F.X. Diebold, „Practical Volatility and Correlation Modeling for Financial Market Risk Management”, w: M. Carey, R. Stultz (red.), Risks of Financial Institutions, University of Chicago Press for NBER, 2006.
- T.G. Andersen, T. Bollerslev, P.F. Christoffersen, F.X. Diebold, „Volatility and Correlation Forecasting”, w: G. Elliot, C.W.J. Granger, A. Timmermann, Handbook of Economic Forecasting, North-Holland, Amsterdam 2006.

(Wybrana) literatura do drugiej części zajęć (2)

- J.Y. Campbell, A.W. Lo, A.C. MacKinlay, „The Econometrics of Financial Markets”, Princeton University Press, Princeton 1997.
- C. Alexander, „Market Models. A Guide to Financial Data Analysis”, John Wiley & Sons, Chichester 2001.
- K. Dowd, „Measuring Market Risk” (2 wyd.), John Wiley & Sons, Chichester 2005.
- BIS (2011), „Messages from the academic literature on risk measurement for the trading book”, BCBS Working Papers No 19

Outline

- 1 Wstęp
- 2 **Stopy zwrotu**
 - **Wprowadzenie**
 - Proces generujący stopy zwrotu
 - Alternatywne rozkłady
- 3 Modele warunkowej zmienności
 - Warunkowa zmienność – wprowadzenie
 - Jednowymiarowe modele GARCH
 - Wielowymiarowe modele GARCH
- 4 Podstawowe miary ryzyka
 - Spójne miary ryzyka
 - VaR
 - Expected shortfall
- 5 Spektralne miary ryzyka
 - Definicja
- 6 Wybrane modele ryzyka kredytowego

Stopy zwrotu – dla porządku

- Prosta stopa zwrotu:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

- Logarytmiczna stopa zwrotu:

$$r_t \equiv \ln(1 + R_t) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = p_t - p_{t-1}$$

- O ile nie zaznaczono inaczej, w tej prezentacji wykorzystywane są dzienne logarytmiczne stopy zwrotu
 - Addytywność
 - Pewne ułatwienia w modelowaniu stóp zwrotu jako szeregów czasowych
 - Ostrożnie z portfelami

Dlaczego rozkłady stóp zwrotu?

- Zwykle wygodniej modelować stopy zwrotu niż poziomy cen
 - Stopy zwrotu być może są niezależne w czasie, ceny – **na pewno** są zależne
 - Problemy z integracją szeregów – wygodniej jest nie mieć trendów
- Zarządzanie ryzykiem: **o ile i z jakim prawdopodobieństwem** może zmienić się wartość mojego portfela?

Outline

- 1 Wstęp
- 2 **Stopy zwrotu**
 - Wprowadzenie
 - **Proces generujący stopy zwrotu**
 - Alternatywne rozkłady
- 3 Modele warunkowej zmienności
 - Warunkowa zmienność – wprowadzenie
 - Jednowymiarowe modele GARCH
 - Wielowymiarowe modele GARCH
- 4 Podstawowe miary ryzyka
 - Spójne miary ryzyka
 - VaR
 - Expected shortfall
- 5 Spektralne miary ryzyka
 - Definicja
- 6 Wybrane modele ryzyka kredytowego

Grube ogony rozkładów

- Centralne twierdzenie graniczne daje nadzieję na korzystne własności statystyczne rozkładów
- Badania empiryczne potwierdzają odchylenia od normalności
- Odchylenia te zwykle tym większe, im stopy zwrotu dla krótszego okresu
- Grube ogony – istotne w modelowaniu ryzyka – znaczna modyfikacja tej części rozkładu, która jest przedmiotem największego zainteresowania

Dlaczego obserwujemy grube ogony?

- W rzeczywistości rozkład inny niż normalny?
- Heteroskedastyczność i niewłaściwe ujęcie efektów GARCH?
- Stopy zwrotów w rzeczywistości pochodzą z mieszaniny rozkładów normalnych?
- Wpływ nieefektywności rynków?
- Wpływ mikrostruktury rynków?
- Zmienność stochastyczna?
- Proces nieciągły (skoki)?
- Tak naprawdę wszystko jest normalne, tylko mamy zbyt mało obserwacji, żeby to stwierdzić?

Outline

- 1 Wstęp
- 2 **Stopy zwrotu**
 - Wprowadzenie
 - Proces generujący stopy zwrotu
 - **Alternatywne rozkłady**
- 3 Modele warunkowej zmienności
 - Warunkowa zmienność – wprowadzenie
 - Jednowymiarowe modele GARCH
 - Wielowymiarowe modele GARCH
- 4 Podstawowe miary ryzyka
 - Spójne miary ryzyka
 - VaR
 - Expected shortfall
- 5 Spektralne miary ryzyka
 - Definicja
- 6 Wybrane modele ryzyka kredytowego

Rozkłady stabilne

- Szukamy rozkładów, dla których szansa zdarzeń odległych od średniej byłaby większa niż dla rozkładu normalnego
- Wśród kandydatów: rodzina rozkładów stabilnych
 - Suma zmiennych losowych z rozkładów stabilnych ma rozkład stabilny
 - Rozkład normalny szczególnym przypadkiem
 - Znane postaci analityczne funkcji gęstości dla rozkładu Cauchy'ego i Bernoulliego

Problemy z niektórymi rozkładami stabilnymi

- „Niewygodne” w wyprowadzeniach
- Ogony tak grube, że nie istnieją drugie momenty
 - Czyli brak odchylenia standardowego
 - Czyli brak korelacji
 - Problemy z funkcją użyteczności (poza najbardziej trywialnymi przypadkami wyższe momenty rozkładu też się przydają)
- Implikują tak samo „nienormalne” rozkłady stóp zwrotu dla dłuższych okresów utrzymywania – wbrew wynikom empirycznym

Rozkłady gruboogonowe z istniejącymi wyższymi momentami

- Rozkład t-Studenta
- Mieszanina rozkładów normalnych
 - $(1 - \delta_t)\varepsilon_{1,t} + \delta_t\varepsilon_{2,t}$
 - δ_t – zmienna binarna „przełączająca” między rozkładami normalnymi o różnych wariancjach
- Procesy ze skokami

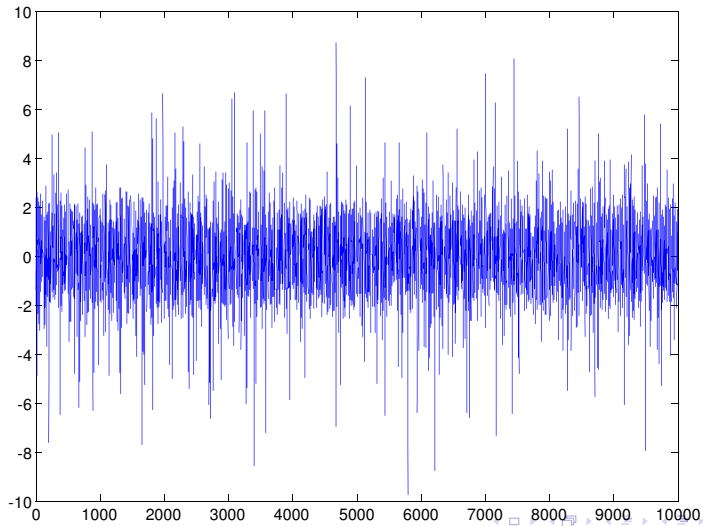
Przykład: Mieszanina rozkładów normalnych

- Dwie zmienne o rozkładzie normalnym

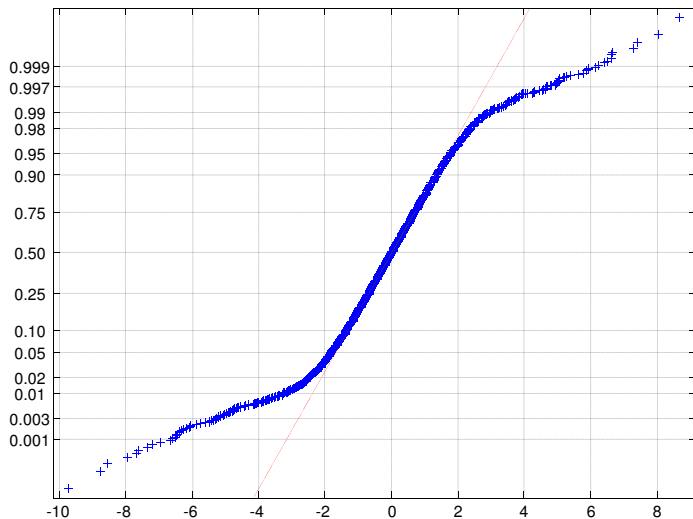
$$\varepsilon_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 3$$

- Z prawdopodobieństwem 95% losujemy z rozkładu ε_1 , zaś z prawd. 5% z rozkładu ε_2
- Generujemy szereg 10 000 obserwacji
- W efekcie obserwowany rozkład bezwarunkowy będzie miał „grube ogony”

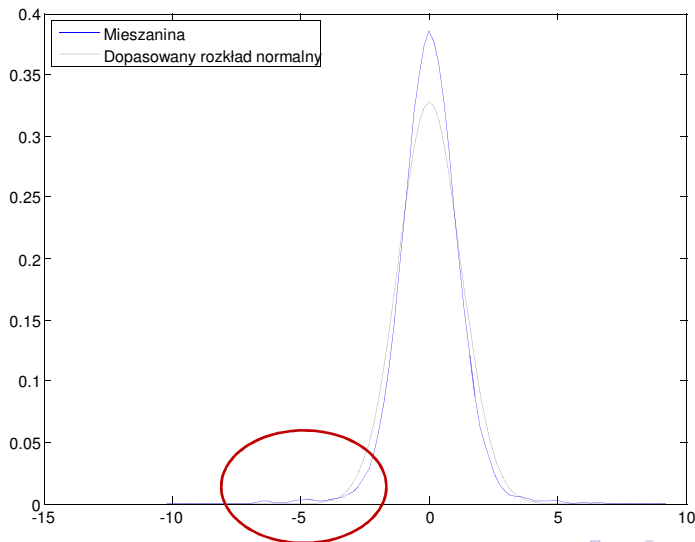
Mieszanina rozkładów normalnych



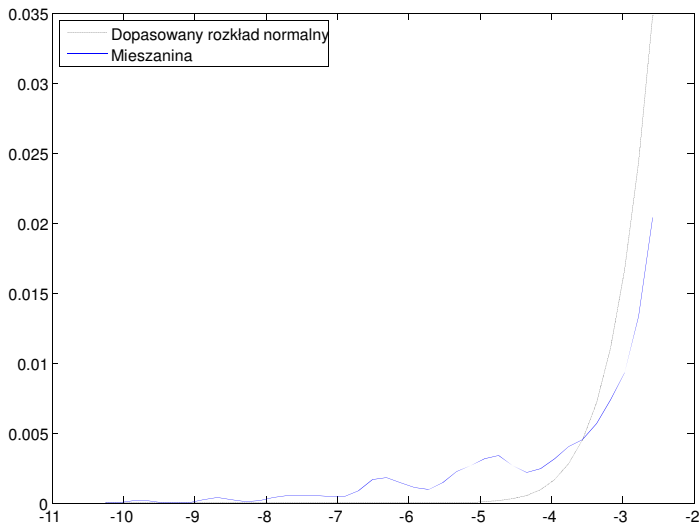
Mieszanina rozkładów normalnych



Mieszanina rozkładów normalnych



Mieszanina rozkładów normalnych



Proces ze skokami

- Do typowego procesu generującego stopy zwrotu dodajemy komponent odpowiedzialny za *skoki* – nagłe, znaczne zmiany
- Możliwe jest wtedy uzyskanie niezerowej skośności rozkładu oraz efektu grubych ogonów
- $r_t = e_t + e_t^J$
 - $e_t \sim N(0, \sigma_t^2)$
 - Zmienna e_t^J jest sumą N_t zmiennych losowych J_n , $n = 1, \dots, N_t$
 - N_t jest zmienną losową o rozkładzie Poissona ze średnią λ , gdzie λ jest liczbą "skoków" w ciągu dnia
 - $J_N \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$

Proces ze skokami – parametry

- Średnia: $\lambda\mu_J$
- Wariancja: $\sigma^2 + \lambda(\mu_J^2 + \sigma_J^2)$
- Skośność: $\lambda\mu_J(\mu_J^2 + 3\sigma_J^2)$
- Kurtoza: $3 + \lambda(\mu_J^4 + 6\mu_J^2\sigma_J^2 + 3\sigma_J^4)$

GEV

- Teoria wartości ekstremalnych pozwala na wyprowadzenie rozkładu skrajnych realizacji zmiennych losowych przy dość ogólnych założeniach

$$H_{\xi, \mu, \sigma} = \begin{cases} \exp[-(1 + \xi(x - \mu)/\sigma)^{-1/\xi}], & \text{jeżeli } \xi \neq 0 \\ \exp[-\exp(-(x - \mu)/\sigma)], & \text{jeżeli } \xi = 0 \end{cases}$$

- gdzie musi być spełniony warunek $1 + \xi(x - \mu)/\sigma > 0$
- Parametry położenia (μ) oraz skali (σ) nie mogą być bezpośrednio utożsamiane ze średnią i odchyleniem standardowym

GEV

- Parametr ξ decyduje o charakterze ogona rozkładu
 - Dla $\xi > 0$ GEV daje rozkład Fréchéta, co oznacza, że zmienna x ma rozkład gruboogonowy
 - Dla $\xi = 0$ otrzymujemy rozkład Gumbela z kurtozą taką, jak dla rozkładu normalnego (3)
 - Dla $\xi < 0$ (rozkład Weibulla) mamy ogon cieńszy niż dla rozkładu normalnego
- Możliwe wyprowadzenie wielkości VaR;
 - $\xi > 0$: $VaR_{\alpha} = \mu - \frac{\sigma}{\xi} [1 - (-\log(\alpha))^{-\xi}]$
 - $\xi = 0$: $VaR_{\alpha} = \mu - \sigma \log[\log(1/\alpha)]$

POT – uogólniony rozkład Pareto

- Niech X będzie zmienną losową o dystrybuancie $F(x)$, dla danego poziomu granicznego u można określić rozkład strat przekraczających u :

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u)$$

- Dla dużych wartości u , rozkład $F_u(y)$ dąży do uogólnionego rozkładu Pareto:

$$G_{\xi, \beta} = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x / \beta)^{-1/\xi}, & \text{jeżeli } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x/\beta), & \text{jeżeli } \xi = 0 \end{cases}$$

POT – parametryzacja

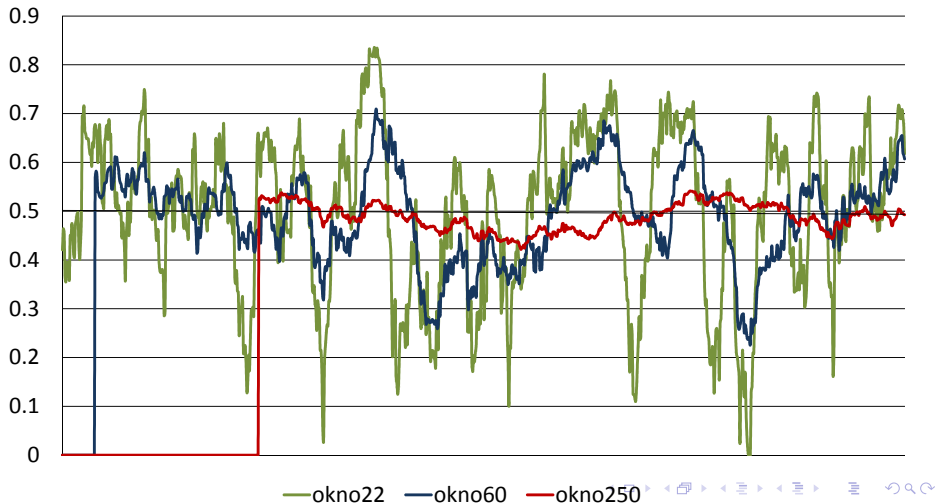
- Rozkład zależy tylko od dwóch parametrów – skali (β) oraz kształtu (ξ), decydującym o charakterze ogona (*tail index*)
- Problem doboru granicznej wartości u – wysoka wartość wymagana, żeby zadziałała asymptotyczna teoria, jednak to ogranicza liczbę obserwacji ekstremalnych
- Możliwe wyznaczenie wartości VaR:

$$VaR_{\alpha} = u + \frac{\beta}{\xi} \left\{ \left[\frac{n}{N_u} (1 - \alpha) \right]^{-\xi} - 1 \right\}$$

Outline

- 1 Wstęp
- 2 Stopy zwrotu
 - Wprowadzenie
 - Proces generujący stopy zwrotu
 - Alternatywne rozkłady
- 3 **Modele warunkowej zmienności**
 - **Warunkowa zmienność – wprowadzenie**
 - Jednowymiarowe modele GARCH
 - Wielowymiarowe modele GARCH
- 4 Podstawowe miary ryzyka
 - Spójne miary ryzyka
 - VaR
 - Expected shortfall
- 5 Spektralne miary ryzyka
 - Definicja
- 6 Wybrane modele ryzyka kredytowego

Zmienność oszacowania czy zmienność parametru?



Modelowanie zmienności

- Zmienność jest zmienna w czasie
- Zmienność nie jest bezpośrednio obserwowalna
- Zmienność może być podstawą wyceny instrumentów finansowych
- Jaka jest wartość zmienności dzisiaj?
- Jaka będzie wartość zmienności jutro?
- Skąd brać zmienność?

Dlaczego modele warunkowej zmienności?

- Wycena opcji
- Realistyczne oszacowania ryzyka
- Szacowanie stóp zwrotu skorygowanych o ryzyko
- Wybór optymalnego portfela
 - Zmienne w czasie β w CAPM

Model wygładzania wykładniczego

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2$$

$$\sigma_t^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \lambda) \lambda^j r_{t-1-j}^2$$

- Podejście spopularyzowane przez RiskMetrics
- λ kalibrowana arbitralnie (zwykle 0,94 dla danych dziennych)
 - Jak szybko model „zapomina” o historycznej zmienności

Outline

- 1 Wstęp
- 2 Stopy zwrotu
 - Wprowadzenie
 - Proces generujący stopy zwrotu
 - Alternatywne rozkłady
- 3 **Modele warunkowej zmienności**
 - Warunkowa zmienność – wprowadzenie
 - **Jednowymiarowe modele GARCH**
 - Wielowymiarowe modele GARCH
- 4 Podstawowe miary ryzyka
 - Spójne miary ryzyka
 - VaR
 - Expected shortfall
- 5 Spektralne miary ryzyka
 - Definicja
- 6 Wybrane modele ryzyka kredytowego

Model GARCH

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2; \omega, \alpha, \beta \geq 0; \alpha + \beta \leq 1$$

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega}{1 - \beta} + \alpha \sum \beta^{j-1} r_{t-j}^2$$

- Możliwe uogólnienie na GARCH(m,n)
- Liczne wersje modelu GARCH (asymetryczne, „zapadkowe”, modyfikacje procesu r , ...)
- Estymacja zwykle poprzez (quasi) MNW
- Model wygładzania wykładniczego jest szczególnym przypadkiem GARCH(1,1)

Model GARCH

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

$$\sigma^2 \equiv \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}$$

- Zależność od wartości długookresowej:

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 + \alpha(r_{t-1}^2 - \sigma^2) + \beta(\sigma_{t-1}^2 - \sigma^2)$$

- Warunkowa prognoza zmienności:

$$\sigma_{t+k|t}^2 = \sigma^2 + (\alpha + \beta)^{k-1}(\sigma_{t+1|t}^2 - \sigma^2)$$

Outline

- 1 Wstęp
- 2 Stopy zwrotu
 - Wprowadzenie
 - Proces generujący stopy zwrotu
 - Alternatywne rozkłady
- 3 **Modele warunkowej zmienności**
 - Warunkowa zmienność – wprowadzenie
 - Jednowymiarowe modele GARCH
 - **Wielowymiarowe modele GARCH**
- 4 Podstawowe miary ryzyka
 - Spójne miary ryzyka
 - VaR
 - Expected shortfall
- 5 Spektralne miary ryzyka
 - Definicja
- 6 Wybrane modele ryzyka kredytowego

Wielowymiarowe modele warunkowej zmienności (MGARCH)

- Zmienność na różnych rynkach może zależeć od wspólnych czynników
- Wzrost zmienności na jednym rynku może powodować zmianę zmienności na innym rynku
- Zależności (kowariancje/korelacje) między rynkami mogą być zmienne w czasie

Ogólna specyfikacja modelu

$$R_t = \Omega_t^{\frac{1}{2}} Z_t \quad Z_t \sim \text{i.i.d}$$
$$E(Z_t) = \mathbf{0} \quad \text{var}(Z_t) = I$$

- Ω to wielowymiarowa analogia wariancji
- W modelowaniu konieczne zapewnienie, by macierz Ω była nieujemnie określona
- Dla N aktywów w macierzy Ω mamy $N(N+1)/2$ wolnych parametrów do oszacowania
- W praktyce konieczne nałożenie restrykcji w celu zmniejszenia wymiarowości problemu

Wykładanie wykładnicze

- Dla macierzy robimy to samo co wcześniej dla skalarów

$$\Omega_t = \lambda \Omega_{t-1} + (1 - \lambda) R_{t-1} R'_{t-1}$$

- Podejście bardzo restrykcyjne – implikowane założenie o takim samym stopniu wykładania dla wszystkich parametrów
- Ale mamy gwarancję nieujemnej określoności macierzy Ω_t

Wielowymiarowy GARCH

- Wielowymiarowy odpowiednik modelu GARCH(1,1):

$$vech(\Omega_t) = vech(\mathbf{C}) + \mathbf{B}vech(\Omega_{t-1}) + \mathbf{A}vech(R_{t-1}R'_{t-1})$$

- Operator $vech$ przekształca macierz symetryczną w wektor $N(N+1)/2 \times 1$
- Macierze $\mathbf{A}$ oraz $\mathbf{B}$ mają wymiary $N(N+1)/2 \times N(N+1)/2$
- W najbardziej ogólnej postaci w modelu trzeba oszacować $O(N^4)$ parametrów
- Czyli dla $N = 100$ aktywów ponad 51mln parametrów do oszacowania!

MGARCH – vech(1,1)

$$\begin{bmatrix} h_{11t} \\ h_{21t} \\ h_{22t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{1,t-1}^2 \\ \epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} \\ \epsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{21,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix}$$

Nakładamy restrykcje

- Musimy coś zrobić – najlepiej z macierzami **A** oraz **B**
- Wersja najbardziej restrykcyjna:

$$\Omega_t = \mathbf{C} + \beta\Omega_{t-1} + \alpha R_{t-1} R'_{t-1}$$

- Przekształcając podobnie jak dla GARCH:

$$\Omega_t = \Omega + \beta(\Omega_{t-1} - \Omega) + \alpha(R_{t-1} R'_{t-1} - \Omega)$$

- Ponownie wersja nieco mniej restrykcyjna niż wykładnicze
- Szukamy czegoś bardziej ogólnego

Model BEKK

- Reparametryzujemy specyfikację *vech*
 - Zapewnienie nieujemnej określoności szacowanej macierzy wariancji-kowariancji

$$\Omega_t = \mathbf{C}'\mathbf{C} + \mathbf{B}'\Omega_{t-1}\mathbf{B} + \mathbf{A}'(R_{t-1}R_{t-1}')\mathbf{A}$$

- $N(5N + 1)/2$ parametrów do oszacowania
- Możemy nałożyć dodatkowe restrykcje na macierze $\mathbf{A}$ oraz $\mathbf{B}$

BEKK(1,1,1)

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} h_{11t} & h_{12t} \\ h_{21t} & h_{22t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \epsilon_{1,t-1}^2 & \epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} \\ \epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} & \epsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} h_{11,t-1} & h_{12,t-1} \\ h_{21,t-1} & h_{22,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

DCC – Dynamic Condition Correlation

- Korzystamy z dekompozycji macierzy wariancji-kowariancji: $\Omega_t \equiv D_t \Gamma_t D_t$
 - Γ_t – macierz korelacji
 - D_t – diagonalna macierz odchyleń standardowych
- Możliwe jest indywidualne modelowanie warunkowej zmienności dla poszczególnych szeregów
- Zwykle dość restrykcyjna specyfikacja dla procesu zmian korelacji
- W wersji $\Gamma_t = \Gamma$ – model stałych warunkowych korelacji (CCC)
 - Ale takie założenie może być zbyt restrykcyjne

Modele czynnikowe

- Być może stopy zwrotu danej klasy aktywów zależą od stosunkowo niewielkiej liczby (być może nieobserwowalnych) **czynników**
 - Przykład – wycena obligacji i modelowanie krzywej dochodowości
- Budujemy model MGARCH tylko dla czynników, a następnie „odtworzymy” odpowiednie parametry dla rzeczywistych aktywów
- Powiązana klasa – ortogonalne modele GARCH

Outline

- 1 Wstęp
- 2 Stopy zwrotu
 - Wprowadzenie
 - Proces generujący stopy zwrotu
 - Alternatywne rozkłady
- 3 Modele warunkowej zmienności
 - Warunkowa zmienność – wprowadzenie
 - Jednowymiarowe modele GARCH
 - Wielowymiarowe modele GARCH
- 4 Podstawowe miary ryzyka
 - Spójne miary ryzyka
 - VaR
 - Expected shortfall
- 5 Spektralne miary ryzyka
 - Definicja
- 6 Wybrane modele ryzyka kredytowego

Pożądane właściwości miar ryzyka

- Niech X oraz Y oznaczają (nominalne) zwroty z dwóch portfeli
- Miarę ryzyka ρ nazywamy spójną, gdy spełnia:
 - $Y \geq X \Rightarrow \rho(Y) \leq \rho(X)$
 - $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ (subaddytywność)
 - $\rho(hX) = h\rho(X)$ dla $h > 0$
 - Dla znanej (pozbawionej ryzyka) kwoty n :
$$\rho(X + n) = \rho(X) - n$$
- W praktyce najważniejsza jest subaddytywność
- Uwaga: miara ryzyka rozważana z punktu widzenia indywidualnego podmiotu/portfela, perspektywa np. ryzyka systemowego może być inna

Outline

- 1 Wstęp
- 2 Stopy zwrotu
 - Wprowadzenie
 - Proces generujący stopy zwrotu
 - Alternatywne rozkłady
- 3 Modele warunkowej zmienności
 - Warunkowa zmienność – wprowadzenie
 - Jednowymiarowe modele GARCH
 - Wielowymiarowe modele GARCH
- 4 Podstawowe miary ryzyka
 - Spójne miary ryzyka
 - VaR
 - Expected shortfall
- 5 Spektralne miary ryzyka
 - Definicja
- 6 Wybrane modele ryzyka kredytowego

Value at Risk (VaR)

- Wartość zagrożona
- Wartość narażona na ryzyko
- ...ale nie VAR – Vector AutoRegression!
- Popularna miara ryzyka
- Popularność wspierana regulacjami nadzorczymi
- ...ale od strony teorii ma pewne wady
 - Dla ogólnych rozkładów nie jest spójną miarą ryzyka

Definicja VaR

- Oszacowanie, przy założonym poziomie prawdopodobieństwa, straty w danym horyzoncie czasowym
- Na przykład: szacujemy, że z prawdopodobieństwem 99% w ciągu kolejnych 10 dni roboczych nie stracimy więcej niż 10 mln PLN

VaR – uwagi do definicji

- VaR **nie jest** maksymalną możliwą wielkością straty
- VaR **nie określa**, jak dużo możemy stracić, jeśli strata przekroczy wartość VaR
- VaR zakłada typowe warunki rynkowe
- Oszacowana wartość VaR jest warunkowana modelem zachowania się stóp zwrotu
- Przekroczenia przez straty poziomu VaR jest normalne (byle nie za często)

Prawdopodobieństwo przekroczenia VaR (1 dzień, 99%)

Liczba przekroczeń	Prawdop.	Prawdop. skumulowane
0	8,11%	8,11%
1	20,47%	28,58%
2	25,74%	54,32%
3	21,50%	75,81%
4	13,41%	89,22%
5	6,66%	95,88%
6	2,75%	98,63%
7	0,97%	99,60%
8	0,30%	99,89%
9	0,08%	99,98%
10	0,02%	100,00%
11	0,00%	100,00%

Niespójność VaR jako miary ryzyka

- Portfel dwóch obligacji (A i B)
 - Wartość nominalna każdej wynosi 100
 - Prawdopodobieństwo upadłości: 4%, upadłości niezależne
 - Rozkład możliwych wartości portfela:
 - $P(W = 200) = 0,96^2 = 0,9216$
 - $P(W = 0) = 0,04^2 = 0,0016$
 - $P(W = 100) = 1 - 0,9216 - 0,0016 = 0,0768$
- $VaR_{95\%}(A) = VaR_{95\%}(B) = 0$
- $VaR_{95\%}(A + B) = 100 > 0 = VaR_{95\%}(A) + VaR_{95\%}(B)$

VaR – sposoby wyznaczania

- Metoda wariancji-kowariancji
- Symulacja historyczna
- Symulacja Monte Carlo

Metoda wariancji-kowariancji

- Założenie: normalny rozkład wszystkich czynników ryzyka
- Portfel instrumentów liniowych względem czynników ryzyka
- Zmiany wartości portfela – również rozkład normalny
- Wyprowadzamy wzór, podstawiamy zmienności i korelacje

Metoda wariancji-kowariancji

- Zalety:
 - Względnie prosta do zrozumienia i wdrożenia
 - Niewielkie zapotrzebowanie na zasoby
- Problemy:
 - Niezbyt realistyczne założenia o rozkładach czynników ryzyka
 - Nie można uwzględnić bardziej skomplikowanych instrumentów pochodnych
 - Dla portfeli o dużej liczbie składników oszacowanie macierzy wariancji-kowariancji może być trudne

Symulacja historyczna

- Zbieramy dane o przeszłych wartościach czynników ryzyka
- Wyceniamy posiadany portfel dla takich wartości czynników ryzyka
- Sortujemy zmiany
- Bierzemy odpowiedni percentyl

Symulacja historyczna

- Zalety:
 - (Prawie) żadnych założeń parametrycznych!
„prawie” robi różnicę – szczegóły za chwilę
 - Łatwa do zrozumienia
- Problemy:
 - Konieczne przechowywanie wielu danych
 - Dane historyczne niedostępne dla części aktywów
(np. nowe produkty)
 - Co ze zmianami strukturalnymi na rynkach?

Symulacja Monte Carlo

- Sztuczne generowanie ścieżek czynników ryzyka
- Na tej podstawie wycena posiadanego portfela
- Sortujemy zmiany wartości
- Bierzemy odpowiedni percentyl

Symulacja Monte Carlo

- Zalety:
 - Potencjalnie najbardziej elastyczne podejście
 - Można wyceniać dowolne instrumenty
- Problemy
 - Dużo zależy od założeń co do procesów generujących dane
 - Duża złożoność obliczeniowa
 - Najtrudniejsza do implementacji
- „Sztuczki” numeryczne
 - Przybliżenie delta-gamma (intuicja: podobnie jak *duration* i *convexity* dla obligacji)
 - Metody redukowania zmienności estymatora

Dekompozycja VaR

- „Wkład” poszczególnych ekspozycji do VaR portfela zwykle mniejszy niż VaR dla danej pozycji (efekt dywersyfikacji)
- W wielu przypadkach istotne jest określenie wielkości wpływu ekspozycji (lub jej zmiany) na VaR
 - Budżetowanie ryzyka/kapitału
 - Pomiar rentowności skorygowanej o ryzyko
 - Ocena kapitałochłonności różnych potencjalnych inwestycji

Horyzont czasowy VaR

- Co jeśli interesuje nas dłuższy okres utrzymywania pozycji?
- Prosto jeśli założymy i.i.d. procesu stóp zwrotu
 - Promowane przez regulatorów: reguła „pierwiastka czasu”
- Problem jeśli chcemy uwzględnić efekty GARCH
- W metodzie MC możemy założyć dowolny proces
 - Trzeba oszacować proces generujący dane – problem dużych portfeli
 - Rośnie złożoność obliczeniowa
- Bardziej skomplikowane dla symulacji historycznej – metoda przestaje być „wolna od założeń”!
- Co jeśli chcemy agregować VaR dla różnych horyzontów czasowych?

VaR jako statystyka

- Oszacowanie VaR jest percentylem rozkładu, możemy więc stosować wszystkie narzędzia statystyczne związane z testowaniem hipotez dotyczących parametrów
- Niepewność co do oszacowania wartości VaR jako wyniku szacowanego wcześniej modelu, problemy szczególnie duże dla VaR szacowanego dla wysokim poziomów ufności (mało obserwacji – szeroki przedział ufności oszacowania parametru)
- Obok poziomu ufności VaR, należy wybrać poziom istotności dla testu
- W ogólności, przy testowaniu oszacowań miar ryzyka chcielibyśmy móc odnosić się do modeli dla całych rozkładów

Testy oparte na częstości ekstremalnych zwrotów

- Pytanie, czy częstość przekroczeń wartości VaR jest zgodna z przyjętym poziomem ufności dla VaR
- Założenie, że poszczególne realizacje (i ewentualne przekroczenia) są zdarzeniami niezależnymi
- Możliwe wyniki dane rozkładem dwumianowym

Test częstości przekroczeń

- Test "wbudowany" w konstrukcję wymogu kapitałowego (Bazylea II) dla metody zaawansowanej ryzyka rynkowego
- Test może być nieefektywny (mieć słabą moc) przy wykrywaniu niewłaściwego modelu z uwagi na ignorowanie znacznej ilości informacji
 - Wielkość przekroczenia
 - Niezależność przekroczeń w wymiarze czasowym (ewentualna koncentracja)
 - Wymagana znaczna wielkość próby – szerokość przedziału ufności dla uzyskanej liczby przekroczeń
- Problem przy zwiększaniu horyzontu czasowego utrzymywania ekspozycji

Testy rozkładu warunkowego

- Porównujemy empiryczny rozkład strat przekraczających wielkość VaR z rozkładem teoretycznym wynikającym ze stosowanego modelu
- Statystyczne testy różnicy rozkładów – np. Kołmogorow-Smirnow
- Możliwe odrzucenie modelu w sytuacjach, gdy testy oparte na liczbie przekroczeń VaR nie dawałyby do tego podstawy (np. przekroczenia z przewidywaną częstością, ale znacznie większe niż implikowane przez model)
- Problem gdy nie mamy jawnie określonego modelu do porównań (metoda symulacji historycznej)

Testy zgodności rozkładów

- Postępowanie analogiczne jak dla testów rozkładu warunkowego, ale z uwzględnieniem całości rozkładu
- Może mieć uzasadnienie, jeśli model ryzyka wykorzystywany w procesie konstrukcji portfela lub oceny efektywności inwestycji
- Podstawowe (dyskusyjne) założenie: zgodność centrum porównywanych rozkładów daje informację o zgodności ich ogonów
- Przy nisko ustawionym progu testy zgodności dla całych rozkładów i rozkładów warunkowych "zbliżają się" do siebie

Outline

- 1 Wstęp
- 2 Stopy zwrotu
 - Wprowadzenie
 - Proces generujący stopy zwrotu
 - Alternatywne rozkłady
- 3 Modele warunkowej zmienności
 - Warunkowa zmienność – wprowadzenie
 - Jednowymiarowe modele GARCH
 - Wielowymiarowe modele GARCH
- 4 Podstawowe miary ryzyka
 - Spójne miary ryzyka
 - VaR
 - **Expected shortfall**
- 5 Spektralne miary ryzyka
 - Definicja
- 6 Wybrane modele ryzyka kredytowego

Expected shortfall (ES)

- Inne pseudonimy:
 - Expected (tail) loss
 - Conditional VaR
- Wartość oczekiwana straty **pod warunkiem**, że strata przekracza VaR
- Różnica między ES a VaR tym większa, im rozkład bardziej „gruboogonowy”

Outline

- 1 Wstęp
- 2 Stopy zwrotu
 - Wprowadzenie
 - Proces generujący stopy zwrotu
 - Alternatywne rozkłady
- 3 Modele warunkowej zmienności
 - Warunkowa zmienność – wprowadzenie
 - Jednowymiarowe modele GARCH
 - Wielowymiarowe modele GARCH
- 4 Podstawowe miary ryzyka
 - Spójne miary ryzyka
 - VaR
 - Expected shortfall
- 5 Spektralne miary ryzyka
 - Definicja
- 6 Wybrane modele ryzyka kredytowego

Definicja miary ryzyka

- Rozważmy miarę ryzyka M_ϕ :

$$M_\phi = \int_0^1 \phi(p) q_p dp$$

- q_p – p -ty percentyl rozkładu strat
- $\phi(p)$ – funkcja wag zdefiniowana dla $p \in [0, 1]$
- M_ϕ jest miarą ryzyka opartą na kwantylach rozkładu, zróżnicowanie w zależności od przyjętej funkcji wag
- Chcielibyśmy uzależnić $\phi(p)$ od stopnia awersji do ryzyka

Szczególne przypadki

- $VaR_{\alpha} = q_{\alpha}$ – funkcja wag skoncentrowana w jednym punkcie
- $ES_{\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 q_p dp$ – *schodkowa* funkcja wag
- Te specyfikacje nie są zależne od stopnia awersji do ryzyka
- Gubimy znaczną część informacji o rozkładzie

Restrykcje dla $\phi(p)$

- $\phi(p) \geq 0$
- $\int_0^1 \phi(p) dp = 1$
- $\phi'(p) \geq 0$ (w celu wyeliminowania neutralności względem ryzyka czasem warunek formułowany jako $\phi'(p) > 0$)
- Miara spełniająca te warunki nazywana jest spektralną miarą ryzyka
- Spełnia warunki spójnej miary ryzyka
- Do pełnego zdefiniowania spektralnej miary ryzyka konieczne jest również wskazanie postaci i parametryzacji funkcji użyteczności

Wykładnicza funkcja użyteczności

- Wykładnicza funkcja użyteczności: $U(x) = -e^{-kx}$, $k > 0$
 - $R_A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = k$
 - $R_R(x) = -\frac{xU''(x)}{U'(x)} = xk$
 - Możliwa funkcja wag: $\phi(p) = \lambda e^{-k(1-p)} = \frac{ke^{-k(1-p)}}{1-e^{-k}}$
- $M_\phi = \frac{k}{1-e^{-k}} \int_0^1 e^{-k(1-p)} q_p dp$

Potęgową funkcja użyteczności

- Potęgowa funkcja użyteczności, $\gamma > 0$:

$$U(x) = \frac{x^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma}$$

- W przypadku granicznym, gdy $\gamma = 1$: $U(x) = \ln(x)$
 - $R_A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{\gamma}{x}$
 - $R_R(x) = -\frac{xU''(x)}{U'(x)} = \gamma$
 - Możliwa funkcja wag: $\phi(p) = \lambda \frac{(1-p)^{\gamma-1}}{1-\gamma} = \gamma(1-p)^{\gamma-1}$
- $M_\phi = \int_0^1 \gamma(1-p)^{\gamma-1} q_p dp$

Modelowanie ryzyka na rynkach finansowych – niektóre problemy

- Zmienność
 - Jak ją mierzyć?
 - Jak brać pod uwagę zmiany zmienności?
 - Jaka ma być rola zmienności implikowanych?
 - „Pamięć” oszacowań zmienności
- Kowariancje/korelacje
 - Coraz istotniejsze dla wyceny strukturyzowanych produktów finansowych
 - Problem wymiarów!
 - Modelowanie ich zmian w czasie

Modelowanie ryzyka na rynkach finansowych – niektóre problemy

- Jak uwzględniać strukturę terminową zmienności?
- W symulacjach Monte Carlo – różnice w modelach dla stóp procentowych i innych rodzajów aktywów
- Czy można lepiej modelować same ogony rozkładów?
- Modelowanie współwystępowania zdarzeń ekstremalnych

Podstawowe założenia

- Ekspozycjom można przypisać ratingi z powiązanymi prawdopodobieństwami upadłości
- Znane są prawdopodobieństwa zmian przypisanych ratingów (macierz przejść) – proces Markowa
- Znana jest struktura terminowa premii za ryzyko dla poszczególnych klas ratingowych (lub odpowiednie procesy stochastyczne)
- Na podstawie powyższych możliwe jest wyznaczenie rozkładu przyszłej wartości danej ekspozycji

Efekty dywersyfikacji w ramach portfela

- Prawdopodobieństwa upadłości nie są niezależne – problem określenia współzależności między nimi
- Możliwe rozwiązanie – korelacja między wartością aktywów firm (przybliżana przez rynkową wartość akcji), w powiązaniu z uproszczonym modelem Mertona
- Wyznaczanie korelacji może być uproszczone w ramach analizy czynnikowej (problem wymiarów)

Problemy

- Macierz przejść *through-the-cycle* może nie być odpowiednia dla analiz w krótszym niż pełen cykl horyzoncie czasowym
- Losowość elementów macierzy przejść (mogą być traktowane jako oszacowania nieznanymi prawdziwych wartości parametrów)
- Założenie homogeniczności ekspozycji w ramach danej grupy ratingowej
- Uwzględnienie losowości w odniesieniu do stóp procentowych (zarówno wolnych od ryzyka, jak i komponentu premii za ryzyko)
- Ekspozycje muszą mieć przypisane ratingi

Podstawowe założenia

- Rezygnacja z macierzy przejść na rzecz oparcia się na danych rynkowych, w powiązaniu z informacją o strukturze finansowania przedsiębiorstwa
- Prawdopodobieństwo upadłości określane na podstawie oszacowania zmienności wartości kapitału (*distance-to-default*)
- Teoretycznie możliwość lepszego ujęcia zależności między ekspozycjami w ramach portfela

Problemy

- Utrudnione (ale nie niemożliwe) stosowanie do firm niepublicznych
- Konieczność dodatkowego mapowania pomiędzy wyznaczonym bezpośrednio *distance-to-default* a faktycznym prawdopodobieństwem upadłości
- Nie dla wszystkich branż model działa równie dobrze (np. instytucje finansowe)

Podstawowe założenia

- Podejście aktuarialne – upadłość lub brak zmiany stanu
- Liczba upadłości w danym okresie dana rozkładem Poissona (λ)
- Brak bezpośrednio uwzględnionej korelacji między ekspozycjami
- Podejście względnie proste obliczeniowo

Rozszerzenia

- Rozkład Poissona określony jednym parametrem – zmienność implikowanej stopy upadłości może być zaniżona w stosunku do faktycznie obserwowanych wartości
- Ustochastycznienie parametru λ – w tym uzależnienie od czynników zewnętrznych
- Ustochastycznienie stopy odzysku

Funkcja wag w NUK

- ASRF – asymptotic single risk factor model
- Prawdopodobieństwo niewywiązania się ze zobowiązań zależne od globalnego czynnika ryzyka wspólnego dla wszystkich kredytobiorców oraz ryzyka indywidualnego kredytobiorcy (model Mertona z jednym systematycznym czynnikiem ryzyka)
- Założenie o idealnej granularności portfela (pojedyncze ekspozycje skrajnie małe)
- Przy idealnej granularności indywidualne czynniki ryzyka ulegają dywersyfikacji – pozostaje czynnik globalny
- Dodatkowe założenia co do korelacji między prawdopodobieństwami upadłości dla poszczególnych kategorii aktywów oraz wpływu okresu do zapadalności

Określenie upadłości

- Zmiana wartości aktywów danego kredytobiorcy przekraczająca pewien ustalony poziom powoduje niewypłacalność
- Zmiana wartości aktywów Y_i zależy od systematycznego czynnika ryzyka X oraz losowego czynnika ryzyka indywidualnego ϵ_i , charakterystycznego dla danego kredytobiorcy:

$$Y_i = X\sqrt{\rho} + \epsilon_i\sqrt{1-\rho}$$

- Warunek upadłości:

$$Y_i \leq \gamma_i = \Phi^{-1}(PD_i)$$

Funkcja warunkowej oczekiwanej straty

- Warunkowa oczekiwana strata dla ekspozycji i dla danej realizacji X określona jest przez:

$$c_i(x) = P(Y_i \leq \gamma | x) LGD_i =$$

$$P(X\sqrt{\rho} + \epsilon_i\sqrt{1-\rho} \leq \Phi^{-1}(PD_i) | x) LGD_i =$$

$$\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD_i) - x\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right) LGD_i$$

Ostateczny wymóg kapitałowy

$$K(PD, LGD, M) = \frac{1 + b(PD)(M - 2.5)}{1 - 1.5b(PD)} \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + \Phi^{-1}(0.999)\sqrt{\rho(PD)}}{\sqrt{1 - \rho(PD)}} \right)$$

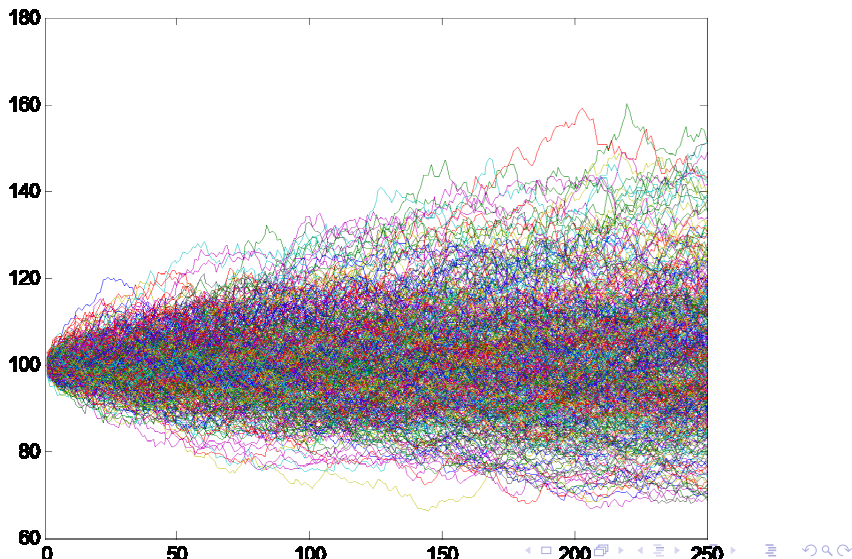
$$b(PD) = (0.22 + 628 - 0.05478 \ln(PD))^2$$

$$\rho(PD) = 0.12(1 + e^{-50PD})$$

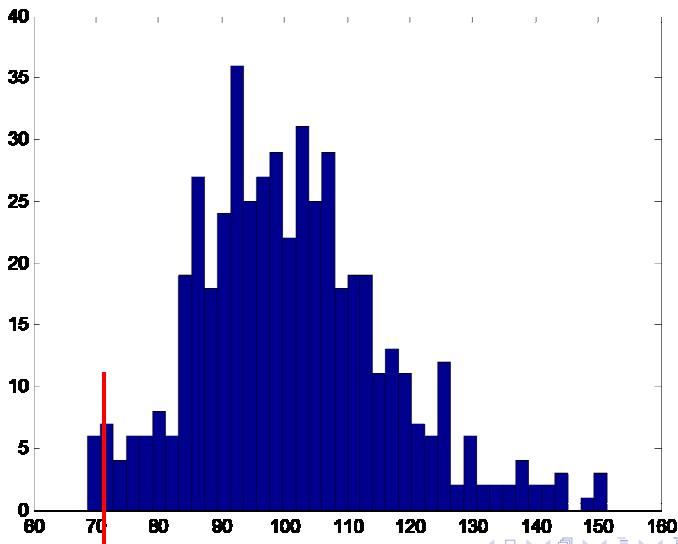
Ograniczenia podejścia ASRF

- W praktyce dla portfeli kredytów korporacyjnych trudno przyjąć założenie o idealnej granularności – część ryzyka specyficznego kredytobiorców nie jest dywersyfikowana
- Koncentracja sektorowa ekspozycji wprowadza dodatkowy czynnik ryzyka („w języku” modelu czynnikowego)
- W rezultacie, przy zachowaniu oczekiwanej wartości strat, następuje wzrost rozproszenia w rozkładzie strat (większy VaR kredytowy)
- Jeśli kapitał na pokrycie ryzyka ma być ustalany jest na podstawie percentyla rozkładu strat kredytowych, konieczna jest korekta w stosunku do modelu ASRF

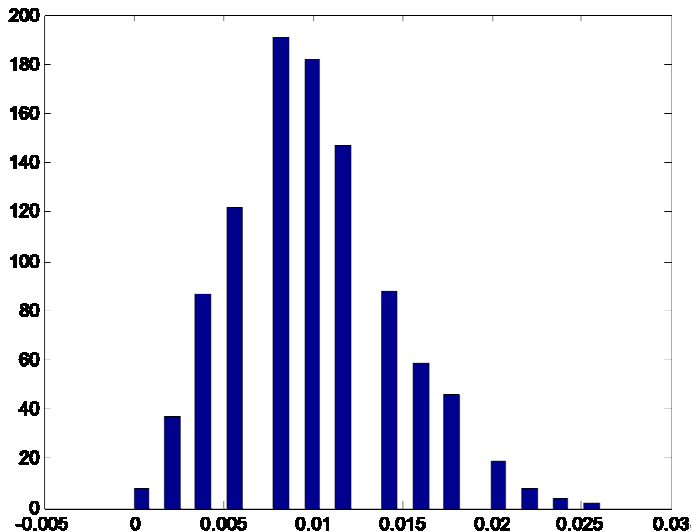
Symulowane ścieżki cen



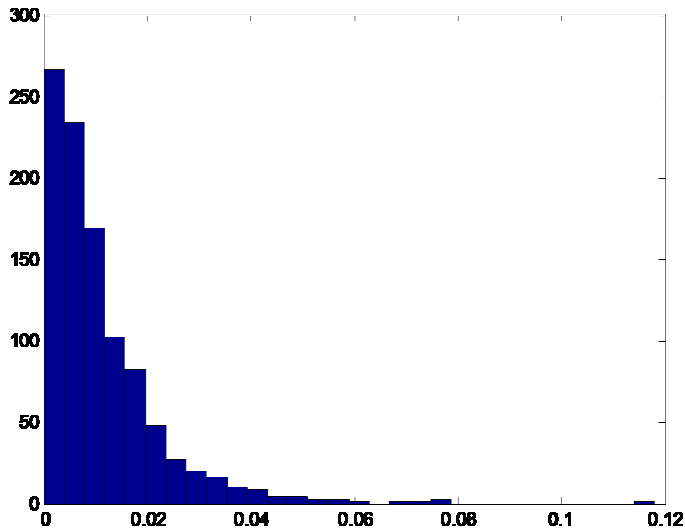
Końcowy rozkład cen



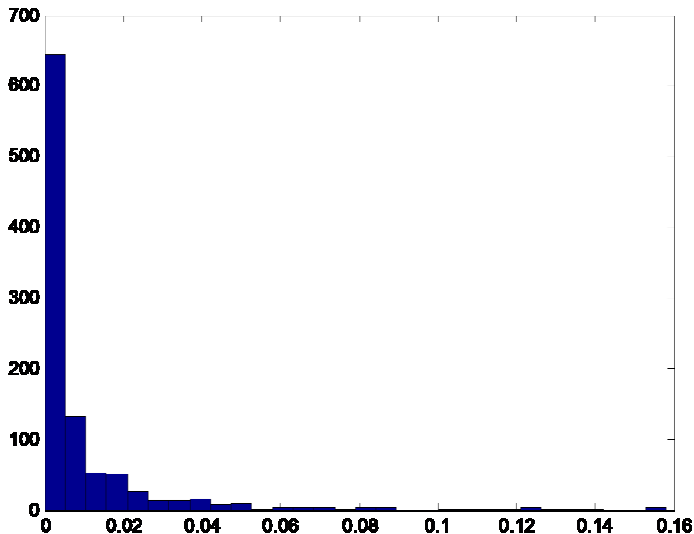
Rozkład strat, niezależne upadłości



Rozkład strat, Korelacja cen 10%



Rozkład strat, Korelacja cen 30%



Rozkład strat w zależności od korelacji

