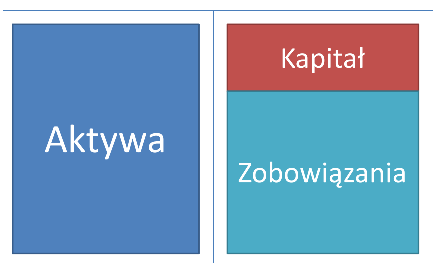
Portfel inwestycyjny

WPROWADZENIE

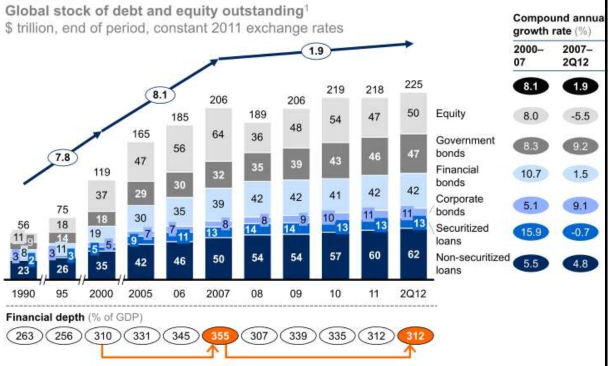
Bilans



Global financial assets have grown to $225 trillion, but growth has slowed since 2007

Global stock of debt and equity outstanding[1]

$ trillion, end of period, constant 2011 exchange rates



1 Based on a sample of 183 countries.

SOURCE: McKinsey Global Institute Financial Assets Database; McKinsey Global Institute analysis

Podstawowe funkcje rynków finansowych

- Pośredniczenie w przepływie środków od podmiotów dysponujących ich nadmiarem (oszczędzających) do potrzebujących finansowania (inwestorzy, konsumenci)
- Pośredniczenie w przekazywaniu i alokacji ryzyka w gospodarce

Rynek pieniężny

- Definiowany zwykle jako rynek dla transakcji instrumentami o charakterze dłużnym z terminem zapadalności do jednego roku
  - Depozyty międzybankowe oraz dużych przedsiębiorstw
  - Rynek OTC
  - Transakcje z niezabezpieczonym ryzykiem kredytowym - depozyty
  - Transakcje z zabezpieczonym ryzykiem kredytowym – REPO, FX SWAP
- Wykorzystywany przede wszystkim do zarządzania płynnością krótkoterminową

Rynek kapitałowy

- Rynek instrumentów finansowych o terminach zapadalności powyżej roku
- Podstawowe instrumenty finansowania
  - Rynek akcji
  - Rynek obligacji
    - korporacyjne
    - municypalne
    - skarbowe

Inne rynki

- Rynki walutowe
- Rynki instrumentów pochodnych
  - Możliwość replikowania innych instrumentów
  - Dostęp do dodatkowych czynników ryzyka (zmienność, korelacja)
- Inne

Hipoteza rynków efektywnych

- Rynki są efektywne, gdy:
  - Inwestorzy zachowują się racjonalnie
  - Wszystkie dostępne informacje odzwierciedlone są w cenach
- Oznacza to, że:
  - Wiadomość, która jest oczekiwana, nie powinna mieć wpływu na ceny
  - Nowa informacja powinna być odzwierciedlona w cenach w pełni i natychmiast

Wersje hipotezy rynków efektywnych (1)

- Słaba
  - Bieżące ceny odzwierciedlają wszystkie informacje, które zawarte są w cenach historycznych
  - Implikacja: analiza techniczna nie powinna działać
- Pół-silna
  - Ceny odzwierciedlają wszystkie publicznie dostępne informacje
  - Implikacja: nie powinny działać ani analiza techniczna, ani fundamentalna

Portfel inwestycyjny 10

Wersje hipotezy rynków efektywnych (2)

- Silna
  - Bieżące ceny odzwierciedlają wszystkie informacji – zarówno publiczne, jak i niejawne
  - Implikacja: nawet insider trading nie powinien prowadzić do uzyskania ponadprzeciętnej stopy zwrotu

Portfel inwestycyjny 11

Czy rynki są efektywne?

- Wiele osób wierzy, że tak…
- …ale wiele wierzy, że nie
- Paradoks: aby rynek był efektywny, muszą istnieć inwestorzy przekonani, że nie jest on efektywny
  - Inaczej nikt nie inwestowałby środków w analizy konieczne do tego, by rynek odzwierciedlał informacje

Portfel inwestycyjny 12

ROZKŁADY STÓP ZWROTU AKTYWÓW FINANSOWYCH

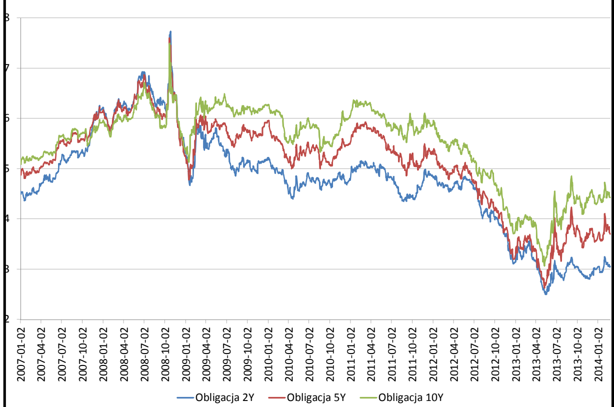
Portfel inwestycyjny 13

Stopy zwrotu

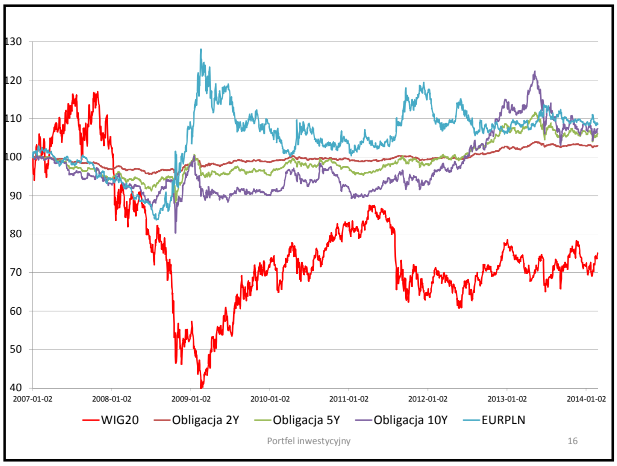
- Prosta stopa zwrotu: $R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$
- Logarytmiczna stopa zwrotu:

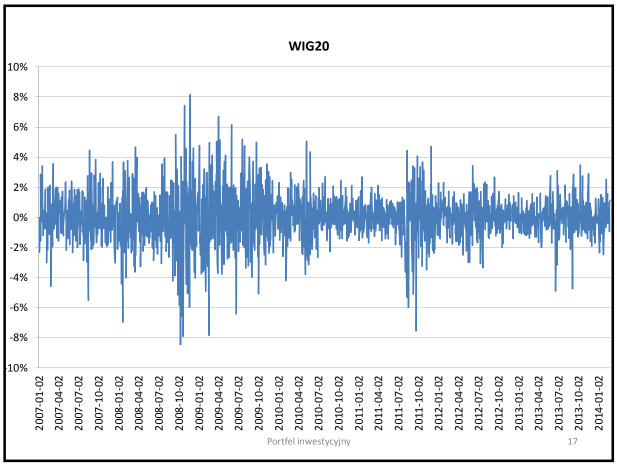
$$r_t \equiv \ln(1 + R_t) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$$

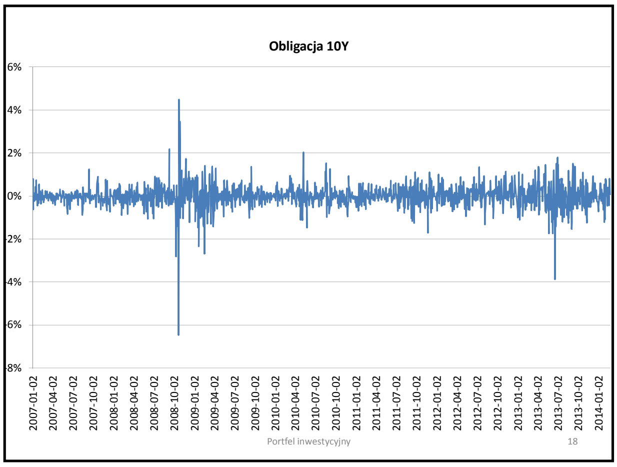
Portfel inwestycyjny 14

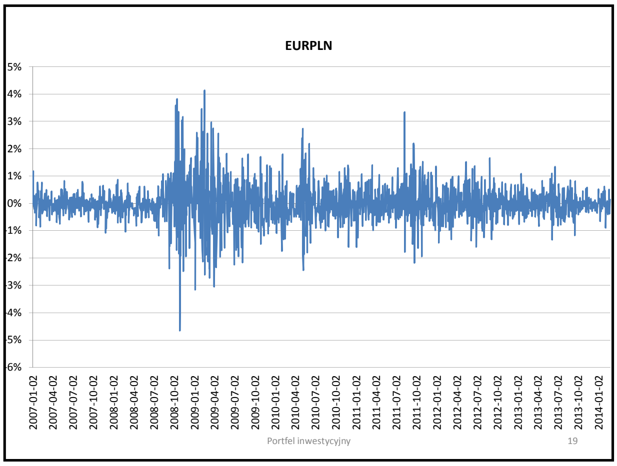


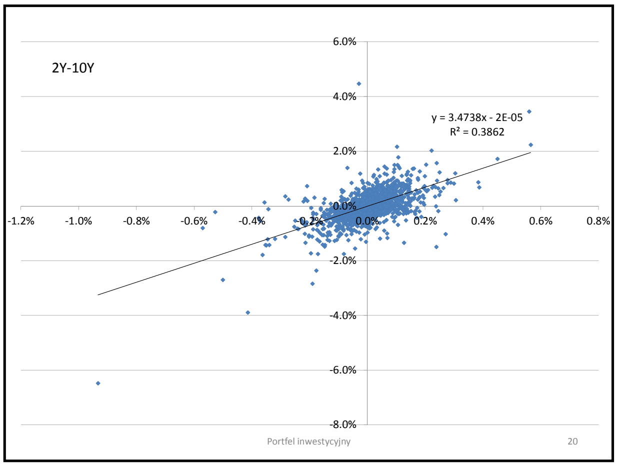
Portfel inwestycyjny 15

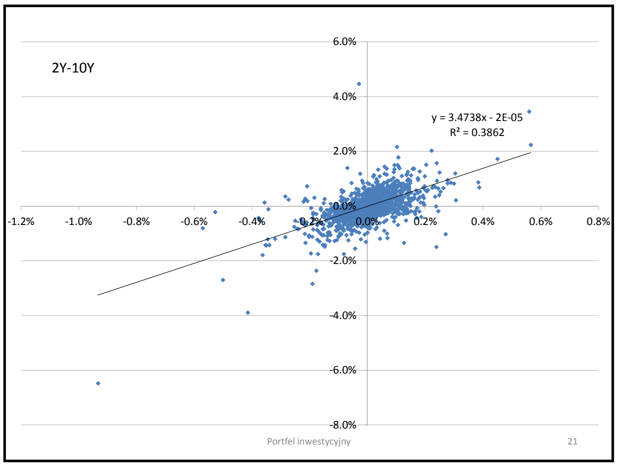

WIG20
Obligacja 2Y
Obligacja 5Y
Obligacja 10Y
EURPLN
Portfel inwestycyjny
16

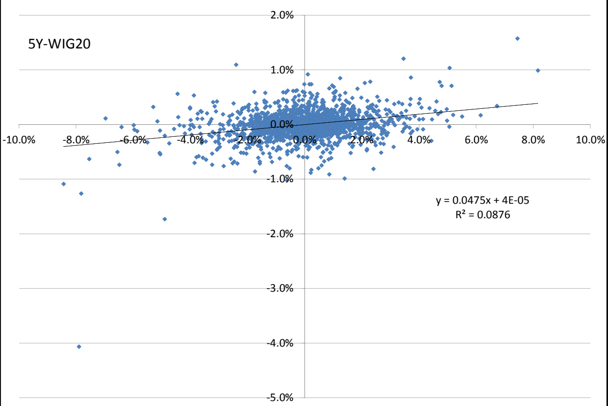

WIG20
Portfel inwestycyjny
17

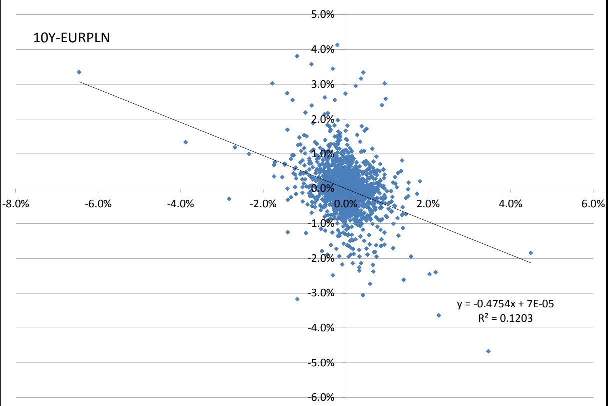

Obligacja 10Y
Portfel inwestycyjny
18


EURPLN
Portfel inwestycyjny
19

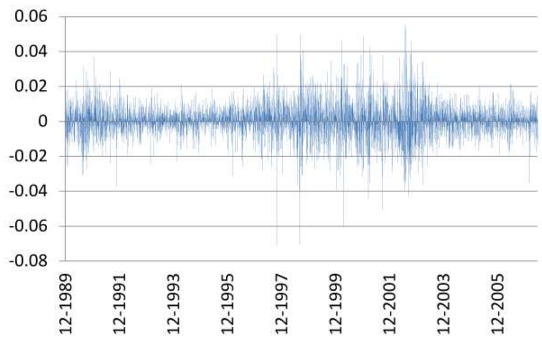

2Y-10Y
y = 3.4738x - 2E-05
R² = 0.3862
Portfel inwestycyjny
20


2Y-10Y
y = 3.4738x - 2E-05
R² = 0.3862
Portfel inwestycyjny
21

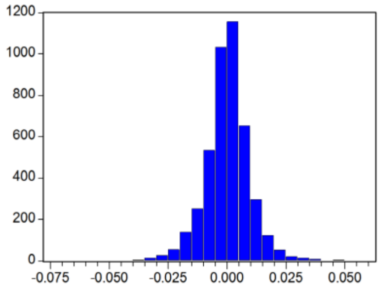




S&P500 – przed kryzysem



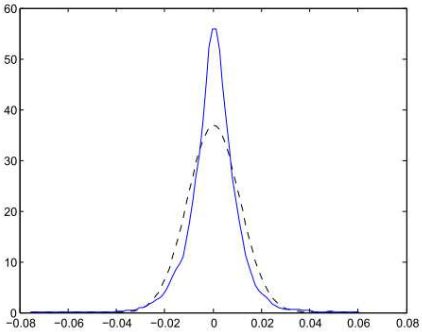
S&P500 – przed kryzysem



Series: DLOG_SP500	
Sample 5050 9460	
Observations 4411	
Mean	0.000332
Median	0.000465
Maximum	0.055744
Minimum	-0.071127
Std. Dev.	0.009885
Skewness	-0.110843
Kurtosis	6.968901
Jarque-Bera	2904.151
Probability	0.000000

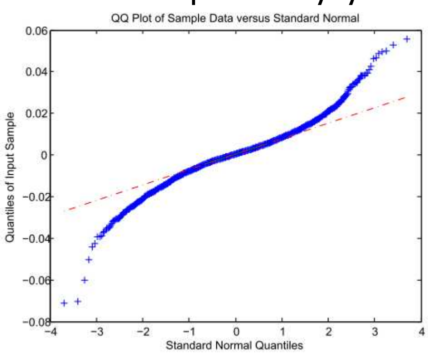
Portfel inwestycyjny 25

S&P500 – przed kryzysem



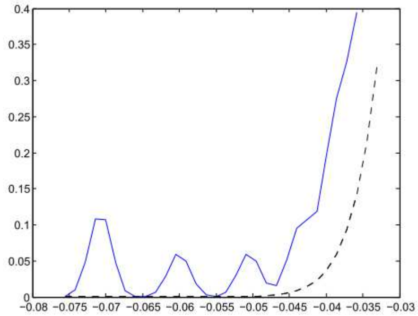
Portfel inwestycyjny 26

S&P500 – przed kryzysem

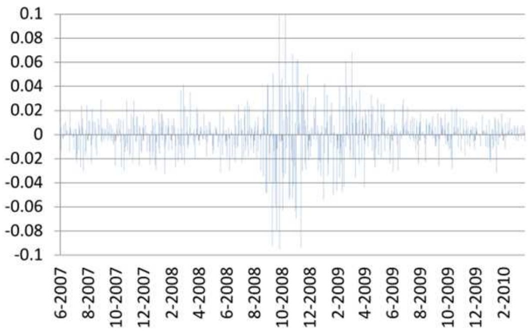


Portfel inwestycyjny 27

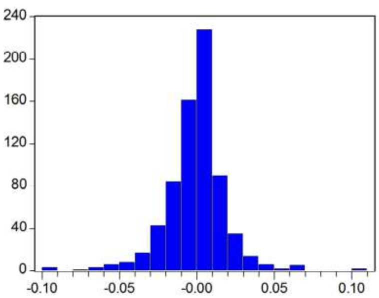
S&P500 – przed kryzysem



S&P500 – w czasie kryzysu



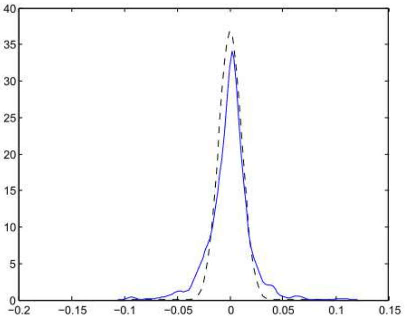
S&P500 – w czasie kryzysu



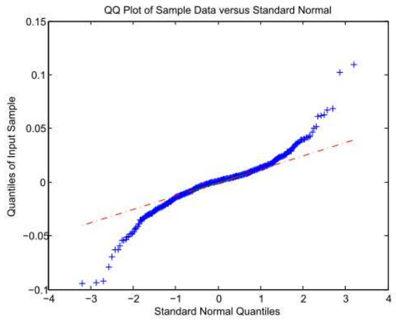
Series: DLOG_SP500
Sample 9460 10170
Observations 708

Mean	-0.000323
Median	0.000920
Maximum	0.109572
Minimum	-0.094695
Std. Dev.	0.019469
Skewness	-0.164706
Kurtosis	8.542109
Jarque-Bera	909.2929
Probability	0.000000

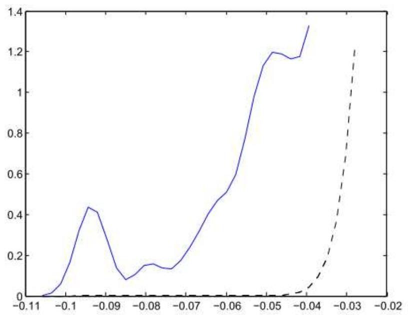
S&P500 – w czasie kryzysu



S&P500 – w czasie kryzysu



S&P500 – w czasie kryzysu



MODELOWANIE ZMIENNOŚCI

Model GARCH(1,1)

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2;\ \omega, \alpha, \beta \geqslant 0; \alpha + \beta \leqslant 1$$

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega}{1-\beta} + \alpha \sum \beta^{j-1} r_{t-j}^2$$

Wielowymiarowe modele GARCH

- Zmienność na różnych rynkach może zależeć od wspólnych czynników
- Wzrost zmienności na jednym rynku może powodować zmianę zmienności na innym rynku
- Zależności (kowariancje/korelacje) między rynkami mogą być zmienne w czasie
- $\widetilde{r_i} - r_f = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}\left(\widetilde{r_M} - r_f\right) = \beta_{iM}\left(\widetilde{r_M} - r_f\right)$
- Ogólna postać modelu:

$R_t = \Omega_t^{1/2} Z_t$, Z_t ~ *i.i.d.*

E(Z_t) = **0**, *var*(Z_t) = *I*

Wielowymiarowy GARCH

- Wielowymiarowy odpowiednik modelu GARCH(1,1):

$$vech(\Omega_t) = vech(\mathbf{C}) + \mathbf{B}vech(\Omega_{t-1}) + \mathbf{A}vech(R_{t-1}R'_{t-1})$$

- Operator vech przekształca macierz symetryczną w wektor $N(N+1)/2 \times 1$
- Macierze **A** oraz **B** mają wymiary $N(N+1)/2 \times N(N+1)/2$
- W najbardziej ogólnej postaci w modelu trzeba oszacować $O(N^4)$ parametrów
- Czyli dla N = 100 aktywów ponad 51 mln parametrów do oszacowania!

Przykład dla dwóch aktywów

$$\begin{bmatrix} h_{11t} \\ h_{21t} \\ h_{22t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^2_{1,t-1} \\ \epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} \\ \epsilon^2_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{21,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix}$$

Model BEKK

$$\Omega_t = \mathbf{C}'\mathbf{C} + \mathbf{B}'\Omega_{t-1}\mathbf{B} + \mathbf{A}'(R_{t-1}R'_{t-1})\mathbf{A}$$

Model BEKK – przykład dla dwóch aktywów

$$\begin{bmatrix} h_{11t} & h_{12t} \\ h_{21t} & h_{22t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \epsilon^2_{1,t-1} & \epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} \\ \epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} & \epsilon^2_{2,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} h_{11,t-1} & h_{12,t-1} \\ h_{21,t-1} & h_{22,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

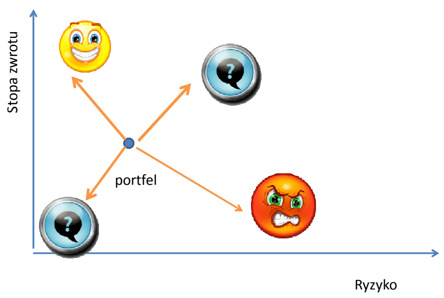
Niektóre inne możliwości zmniejszenia wymiarowości problemu

- Modele warunkowej korelacji (DCC)
  - Korzystamy z możliwości dekompozycji macierzy wariancji-kowariancji
  - $\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \rho_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1,n} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}$
  - Procesy GARCH dla każdego z szeregów modelowane niezależnie
- Modele czynnikowe
  - Być może stopy zwrotu danej klasy aktywów zależą od stosunkowo niewielkiej liczby (być może nieobserwowalnych) czynników
    - Przykład – wycena obligacji i modelowanie krzywej dochodowości
  - Budujemy model MGARCH tylko dla czynników, a następnie „odtwarzamy” odpowiednie parametry dla rzeczywistych aktywów

KRYTERIA WYBORU AKTYWÓW I KONSTRUKCJI PORTFELA

Portfel inwestycyjny 42

Ryzyko i stopa zwrotu

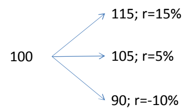


Dywersyfikacja

- Ceny różnych aktywów skorelowane są w różnym stopniu
- Stąd rady, by nie wkładać wszystkich jajek do jednego koszyka
- W ogólności, wykorzystanie mechanizmów dywersyfikacji pozwala obniżyć ryzyko przy zachowaniu **oczekiwanej** stopy zwrotu

Pomiar zmienności cen

- Dla przypomnienia: $\sigma^2(\tilde{r}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2$



$$\sigma^2 = 0{,}010556$$
$$\sigma = 10{,}274\%$$

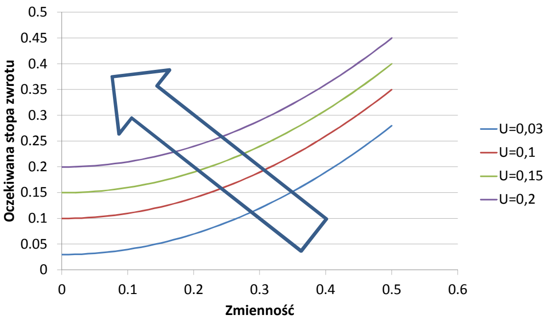
$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Kryteria wyboru portfela

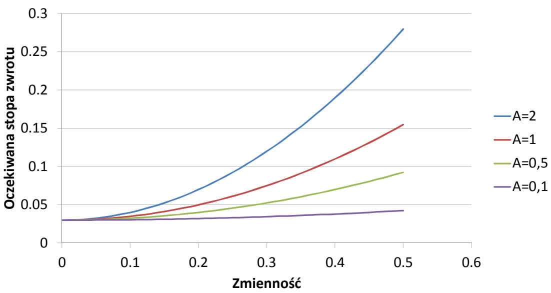
- W najprostszym podejściu – uwzględnienie jednocześnie dwóch kryteriów:
  - Dążenie do maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu $E(\tilde{r})$
  - Dążenie do minimalizacji zmienności portfela $\sigma(\tilde{r})$
- Relację między tymi kryteriami określa funkcja użyteczności, np.

$$U(\tilde{r})=E(\tilde{r})-\frac{1}{2}\boxed{A}\sigma^2(\tilde{r})$$

Dobór portfela



Wpływ awersji do ryzyka



Ekwiwalent pewności

- Stopa zwrotu wolna od ryzyka, która dla danego ryzykownego portfela pozwoli uzyskać taką samą użyteczność

$$r_{CE} = U(\tilde{r}) = E(\tilde{r}) - \frac{1}{2} A\sigma^2(\tilde{r})$$

Ekwiwalent pewności – przykład

	A=0,05	E(r)			
		5%	10%	15%	20%
$\sigma(\tilde{r})$	0,1	4,975%	9,975%	14,975%	19,975%
	0,15	4,944%	9,944%	14,944%	19,944%
	0,2	4,900%	9,900%	14,900%	19,900%
	0,25	4,844%	9,844%	14,844%	19,844%
	A=0,5	E(r)			
		5%	10%	15%	20%
$\sigma(\tilde{r})$	0,1	4,750%	9,750%	14,750%	19,750%
	0,15	4,438%	9,438%	14,438%	19,438%
	0,2	4,000%	9,000%	14,000%	19,000%
	0,25	3,438%	8,438%	13,438%	18,438%
	A=1	E(r)			
		5%	10%	15%	20%
$\sigma(\tilde{r})$	0,1	4,500%	9,500%	14,500%	19,500%
	0,15	3,875%	8,875%	13,875%	18,875%
	0,2	3,000%	8,000%	13,000%	18,000%
	0,25	1,875%	6,875%	11,875%	16,875%

Portfel dwóch aktywów

- Szukamy optymalnej struktury portfela złożonego z dwóch aktywów: wolnego od ryzyka oraz ryzykownego

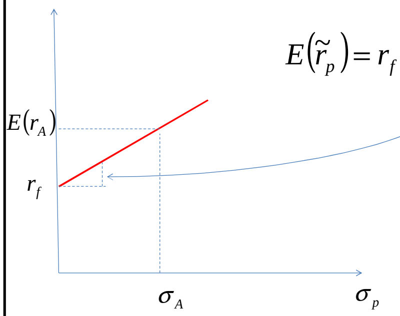
$$\tilde{r}_p = w\tilde{r}_A + (1-w)r_f \qquad \tilde{r}_p = r_f + w\underbrace{(\tilde{r}_A - r_f)}_{\tilde{r}_A^e}$$

$$E(\tilde{r}_p) = r_f + wE(\tilde{r}_A^e)$$

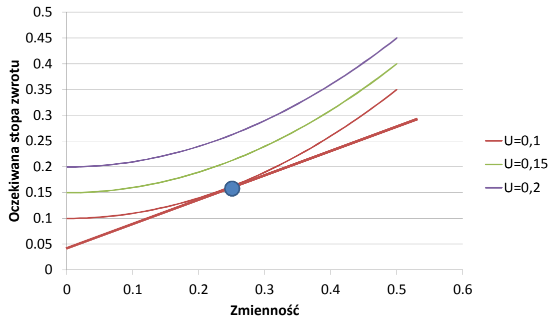
$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_A^2 \qquad E(\tilde{r}_p) = r_f + \left[\frac{E(\tilde{r}_A) - r_f}{\sigma_A}\right]\sigma_p$$

Linia rynku kapitałowego

$$E(\tilde{r}_p) = r_f + \left[\frac{E(\tilde{r}_A) - r_f}{\sigma_A}\right]\sigma_p$$



Optymalny portfel



Wyznaczanie struktury portfela

- Maksymalizujemy funkcję użyteczności:

$$U^* = \max_w U(\tilde{r}_p) = \max_w E(\tilde{r}_p) - \frac{1}{2}A\sigma_p^2$$

$$E(\tilde{r}_p) = r_f + wE(\tilde{r}_A - r_f) \qquad \sigma_p^2 = w^2\sigma_A^2$$

$$\max_w U(\tilde{r}_p) = \max_w\left(r_f + wE(\tilde{r}_A - r_f) - \frac{1}{2}Aw^2\sigma_p^2\right)$$

$$w^* = \frac{E(\tilde{r}_A - r_f)}{A\sigma_A^2}$$

Optymalny portfel a awersja do ryzyka

- Przykład: stopa wolna od ryzyka to 3,5%, ryzykowne aktywo ma oczekiwaną stopę zwrotu 15% przy zmienności 30%

A	w*	E(rp)	s(p)
0,5	2,56	32,9%	76,7%
1	1,28	18,2%	38,3%
2	0,64	10,8%	19,2%
4	0,32	7,2%	9,6%

Portfel bez aktywa wolnego od ryzyka

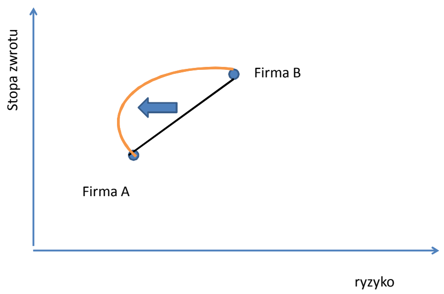
- Konstruujemy portfel na podstawie dwóch ryzykownych aktywów

$$E(\tilde{r}_p) = wE(\tilde{r}_A) + (1-w)E(\tilde{r}_B)$$

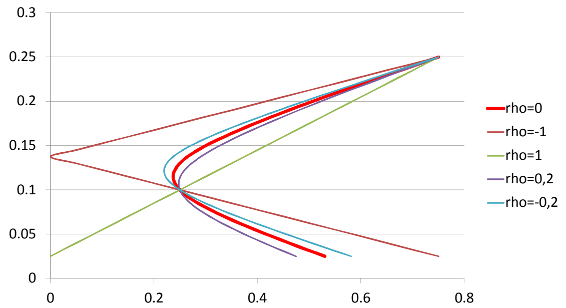
$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_A^2 + (1-w)^2\sigma_B^2 + 2w(1-w)\operatorname{cov}(\tilde{r}_A, \tilde{r}_B)$$

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_A^2 + (1-w)^2\sigma_B^2 + 2w(1-w)\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B$$

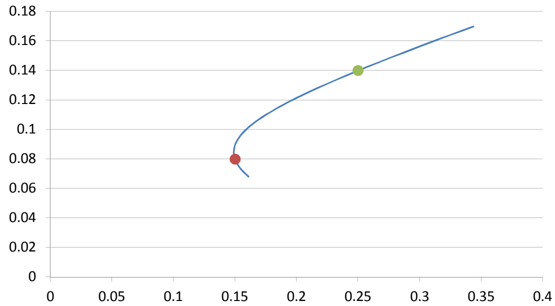
Efekt niepełnej korelacji



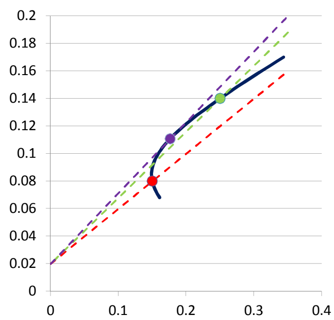
Efekt dywersyfikacji



Aktywo wolne od ryzyka i dwa aktywa ryzykowne



Aktywo wolne od ryzyka i dwa aktywa ryzykowne



E(r)=14%
Sigma=25%
Sharpe=0,48

E(r)=8%
Sigma=15%
Sharpe=0,4

E(r)=11,1%
Sigma=17,6%
Sharpe=0,51

Skąd się bierze dywersyfikacja – macierz korelacji

	EURPLN	USDPLN	CHFPLN	obligacja 2-letnia	obligacja 5-letnia	obligacja 10-letnia
EURPLN	1,0000	0,8322	0,8842	-0,2236	-0,3037	-0,2945
USDPLN	0,8322	1,0000	0,8260	-0,2081	-0,2713	-0,2700
CHFPLN	0,8842	0,8260	1,0000	-0,1755	-0,2432	-0,2345
obligacja 2-letnia	-0,2236	-0,2081	-0,1755	1,0000	0,6852	0,5647
obligacja 5-letnia	-0,3037	-0,2713	-0,2432	0,6852	1,0000	0,8034
obligacja 10-letnia	-0,2945	-0,2700	-0,2345	0,5647	0,8034	1,0000

Model CAPM

Model CAPM – wprowadzenie

- Dotychczasowe wnioski o wyborze optymalnego portfela:
  - Dywersyfikacja ryzykownej części portfela pozwala poprawić relację ryzyko-oczekiwana stopa zwrotu
  - Jeśli dostępne jest aktywo wolne od ryzyka, inwestor dobiera relację lokowania w aktywo wolne od ryzyka i ryzykowne składniki portfela w zależności od preferencji względem ryzyka
  - Niezależnie od preferencji względem ryzyka, optymalna struktura ryzykownej części portfela jest taka sama dla wszystkich inwestorów
- Konstrukcja ryzykownej części portfela ma zapewnić pozbycie się wszystkich niesystematycznych czynników ryzyka
- W modelu CAPM, ryzykowna część portfela to **portfel rynkowy**

Dwa aktywa

w_A - udział akcji firmy A (r_A , σ_A)
w_B - udział akcji firmy B (r_B , σ_B)

$$r_x = w_A \times r_A + w_B \times r_B$$

$$\sigma_x^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B Cov_{A,B}$$

$$Corr_{A,B} = \frac{Cov_{A,B}}{\sigma_A \sigma_B}$$

Portfel inwestycyjny 64

Portfel rynkowy

- Zawiera wszystkie aktywa obarczone ryzykiem
- Struktura portfela wynikająca z udziałów poszczególnych składników w całkowitej kapitalizacji
- W portfelu rynkowym wszystkie niesystematyczne czynniki ryzyka (np. odnoszące się do konkretnej firmy) są zdywersyfikowane i nie mają wpływu na zmienność (ryzyko) tego portfela
- $\tilde{r}_p = r_f + \sum_{i=1}^{n} w_i(\tilde{r}_i - r_f)$
- Całkowity wkład danej pozycji do wariancji portfela:
$$w_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{j \neq i} w_i w_j \sigma_{ij}$$

Składowe portfela

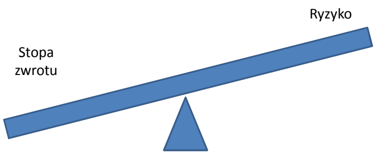
- Krańcowy wpływ pozycji w aktywie *i* na zmienność portfela:
$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = \frac{\sigma_{ip}}{\sigma_p}$$
- Dla składowych portfela rynkowego:
$$\tilde{r}_i - r_f = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}\left(\widetilde{r_M} - r_f\right) = \beta_{iM}\left(\widetilde{r_M} - r_f\right)$$
- β_{iM} jest miarą systematycznego ryzyka dla danego aktywu

Stopy zwrotu a zmienność

- Dekompozycja stóp zwrotu:

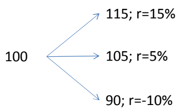
$$\tilde{r}_i - r_f = \alpha_i + \beta_{iM}\left(\widetilde{r_M} - r_f\right) + \tilde{\varepsilon}_i$$

Ocena inwestycji



Pomiar zmienności cen

- Dla przypomnienia: $\sigma^2(\tilde{r}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2$



$$\sigma^2 = 0{,}010556$$
$$\sigma = 10{,}274\%$$

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

CAPM

$$R_i = R_F + \beta_i(R_M - R_f)$$

- R_i – stopa zwrotu z danego instrumentu
- R_M – stopa zwrotu z portfela rynkowego
- R_f – stopa wolna od ryzyka

Alfa Jensena

- Czy inwestor (zarządzający) potrafić „pobić" rynek?
- Osiągnięta stopa zwrotu musi być skorygowana o podejmowane ryzyko

$$\alpha_i = R_i - \left(R_f + \beta_i(R_M - R_f)\right)$$

Wskaźnik Sharpe'a

- σ – odchylenie standardowe (zmienność) stopy zwrotu ponad stopę wolną od ryzyka

$$S = \frac{R_i - R_f}{\sigma}$$

Wskaźnik Treynora

$$T = \frac{R_i - R_f}{\beta}$$

Information ratio

- Użyteczny do oceny np. funduszy inwestycyjnych z przypisanym benchmarkiem
- σ – zmienność *tracking error* (nadwyżki stopy zwrotu ponad benchmark)

$$I = \frac{R_i - R_b}{\sigma} = \frac{R_i - R_b}{\sqrt{var(R_i - R_b)}}$$