# Wycena opcji

1

## Wycena opcji przez model replikujący

- Wystawiliśmy opcję kupna
- Możliwa strata, jeśli kurs aktywu bazowego przekroczy cenę wykonania opcji
- Chcemy skonstruować portfel, którego wartość będzie w przyszłości taka, jak wartość opcji
- Łączny portfel (złożony z wystawionej opcji oraz portfela replikującego) będzie syntetycznym aktywem wolnym od ryzyka

2

## Zmiany wartości instrumentu bazowego

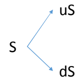
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & uS \\ S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & dS \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] & 105 \\ 100 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 97 \end{tikzcd}$$

S=100; u=1,05; d=0,97

3

## Konstrukcja portfela replikującego

- W skład portfela replikującego wchodzi Δ sztuk akcji oraz pozycja w aktywie wolnym od ryzyka o wartości B
- Załóżmy, że cena wykonania opcji wynosi K, a stopa procentowa – r
- Chcemy mieć:
  - $\Delta uS + B(1+r) = C_u$
  - $\Delta dS + B(1+r) = C_d$
- Przykład (K=100; r=2%):
  - $105\Delta + B(1+0{,}02) = 5$
  - $97\Delta + B(1+0{,}02) = 0$




4

## Rozwiązanie

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S(u-d)} \qquad \Delta = \frac{5-0}{100(1{,}05-0{,}97)} = 0{,}625$$

$$B = \frac{C_d u - C_u d}{(1+r)(u-d)} \qquad B = \frac{0 \cdot 1{,}05 - 5 \cdot 0{,}97}{(1+0{,}02)(1{,}05-0{,}97)} = -59{,}44$$

$$\boxed{C = \Delta S + B}$$

0,625*105 – 59,44(1+0,02) = 5
0,625*97 – 59,44(1+0,02) = 0

5

## Inne przekształcenie

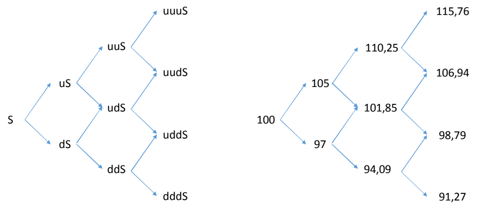
$$C = \Delta S + B \qquad R = 1 + r$$

$$p = \frac{R-d}{u-d}$$

$$C = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{R}$$

6

## Zmiany wartości instrumentu bazowego – wiele okresów




S=100; u=1,05; d=0,97

7

## Wycena opcji w modelu Blacka-Scholesa

- „Zagęszczając" drzewo wyceny będziemy otrzymywać coraz lepsze przybliżenie rozkładu możliwych przyszłych wartości instrumentu bazowego jako zmiennej ciągłej
- Wówczas możemy otrzymać postać analityczną rozwiązań równań wyceny opcji (model Blacka-Scholesa)
- $C = N(d_1)S - N(d_2)Ke^{-r(T-t)}$
- $P = N(-d_2)Ke^{-r(T-t)} - N(-d_1)S$
- $d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ $\quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

8

## Istotne założenia

- Brak kosztów transakcyjnych
- Możliwość lokowania i pożyczania wg wolnej od ryzyka stopy procentowej
- Możliwość dokonywania krótkiej sprzedaży
- Doskonała podzielność instrumentu bazowego
- Ciągła możliwość dokonywania transakcji
- Brak możliwości arbitrażu

9

## Współczynniki wrażliwości

| | | Opcja kupna | Opcja sprzedaży |
|---|---|---|---|
| Delta | $\frac{\partial C}{\partial S}$ | $N(d_1)$ | $N(d_1) - 1$ |
| Gamma | $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$ | $\frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$ | |
| Vega | $\frac{\partial C}{\partial \sigma}$ | $SN'(d_1)\sqrt{T-t}$ | |
| Theta | $\frac{\partial C}{\partial t}$ | $-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$ | $-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(-d_2)$ |
| Rho | $\frac{\partial C}{\partial r}$ | $K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$ | $-K(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$ |

10